Prof. Dr. Alfred Toth

Die Matrix der Relationalzahlen

1. In Toth (2019a) hatten wir uns gefragt, was denn eine Relation zur semiotischen Relation macht. Nun hatte zwar Bense (1981, S. 17 ff.) das Zeichen als triadische Relation über Primzeichen oder Zeichenzahlen eingeführt

$Z = (1, 2, 3)$

und die Isomorphie der Zeichenzahlen mit den Peanozahlen bereits in Bense (1975, S. 167 ff.) aufgezeigt, allein, während die Peanozahlen die Folge

$P = (1, 2, 3, ..., n)$

bilden, bilden die Relationalzahlen eine ganz andere Folge

$Z = (1, ((1, 2), (1, 2, 3)), (1, ((1, 2), ((1, 2, 3), (1, 2, 3, 4))), ...),$

insofern

$2 := (1 \rightarrow 2)$

$3 := (1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)$, usw.

definiert sind. Bense (1979, S. 53) hatte das wie folgt dargestellt:

$ZR(M, O, I) =$

$ZR(M, M \rightarrow O, M \rightarrow O \rightarrow I) =$

ZR(mon. Rel., dyad. Rel., triad. Rel.)

ZR(.1., .2., .3.) =

1.1	1.2	1.3	1.1	1.2	1.3	1.1	1.2	1.3
			2.1	2.2	2.3	2.1	2.2	2.3
						3.1	3.2	3.3

„Mit dieser Notation wird endgültig deutlich, daß Repräsentation auf Semiotizität und Semiotizität auf Gradation der Relationalität beruht“ (Bense 1979, S. 53). Man darf somit eine semiotische Relation als eine gradative Relation definieren. Und da somit gilt

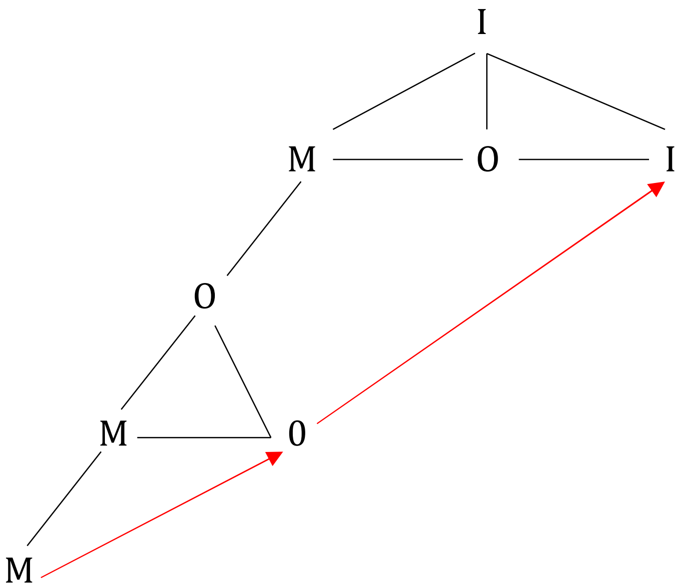
$Z = (1, 2, 3) = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3))),$

ist Z also eine Relation, die sich selbst und alle ihre Teilrelationen enthält. Als selbstreflexive Relation kann sie allerdings nur mittels einer Mengentheorie beschrieben werden, für die das Fundierungsaxiom nicht gilt (vgl. Aczel 1988).

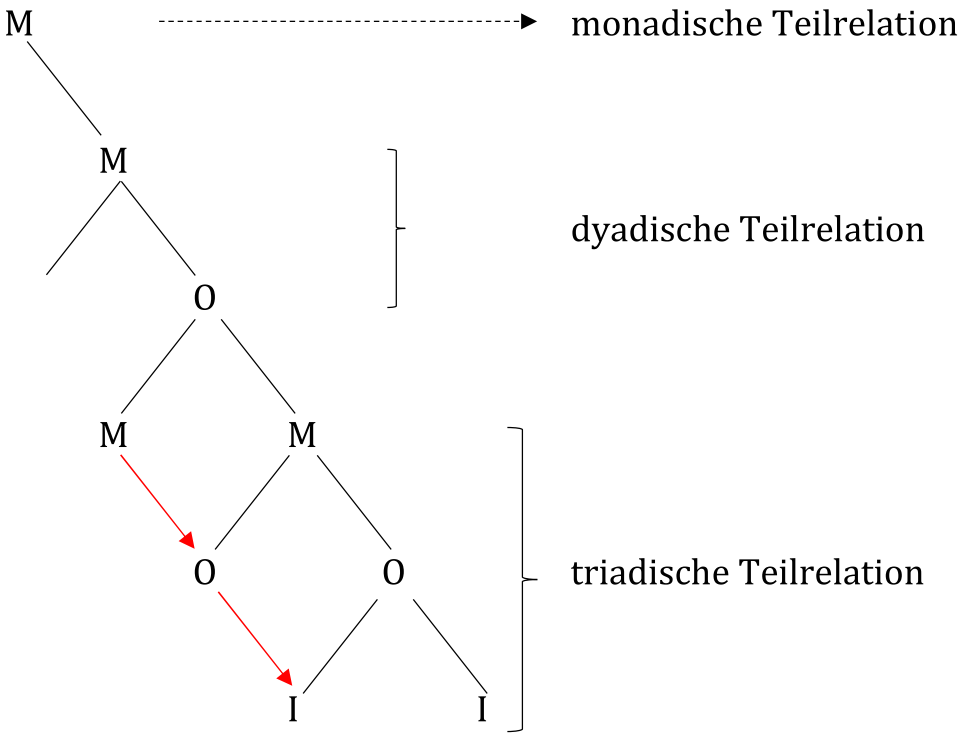
Graphisch läßt sich die relationalzahlige Relation

$Z = (M \to ((M \to O) \to (M \to O \to I)))$

durch



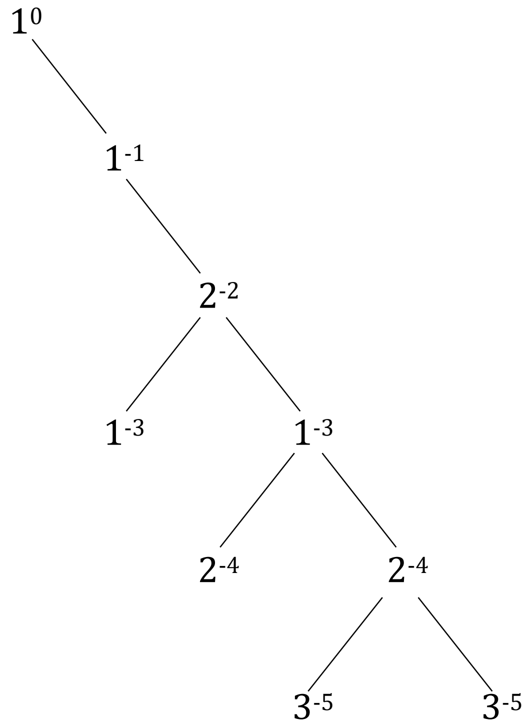
darstellen. Man kann diesen Graphen leicht in eine Baumableitung verwandeln, indem man mit der Kategorie M als Kopf der Ableitung beginnt.



Wenn man nun die semiotischen Kategorien auf die Peircezahlen abbildet

$\text{Kat(sem)} \rightarrow P = (M, O, I) \rightarrow (1, 2, 3)$,

dann erhält man den folgenden semiotischen Baum mitsamt den Einbettungsstufen



Z läßt sich damit in der Form von Relationalzahlen (R) redefinieren (vgl. Toth 2019b)

$Z = ((1^0, 1^{-1}, 1^{-3}), (2^{-2}, 2^{-4}), 3^{-5})$.

Für jede Peircezahl P gilt also P = f(R). Damit werden aber Lücken in der M-Zahlenfolge durch Zahlen aus den O- und I-Folgen geschlossen:

	M	O	I
0	1		
-1	1		
-2	←	2	
-3	1		
-4	←	2	
-5	←		3

2. Mit der Abbildung von Peanozahlen und Relationalzahlen geht also eine Rechtsmehrdeutigkeit einher, welche zwar auf Kosten der mathematischen Präzision geht, gleichzeitig aber ein zusätzliches Moment der kategorialen

Freiheit schafft. (Entsprechendes ist aus der Mathematik der Qualitäten bekannt, vgl. Kronthaler 1986, S. 60.):

Peanozahl		Relationalzahl
(1.1)	→	$(1^0, 1^0), (1^0, 1^{-1}), (1^0, 1^{-3})$
		$(1^{-1}, 1^0), (1^{-1}, 1^{-1}), (1^{-1}, 1^{-3})$
		$(1^{-3}, 1^0), (1^{-3}, 1^{-1}), (1^{-3}, 1^{-3})$
(1.2)	→	$(1^0, 2^{-2}), (1^0, 2^{-4})$
		$(1^{-1}, 2^{-2}), (1^{-1}, 2^{-4})$
		$(1^{-3}, 2^{-2}), (1^{-3}, 2^{-4})$
(1.3)	→	$(1^0, 3^{-5})$
		$(1^{-1}, 3^{-5})$
		$(1^{-3}, 3^{-5})$
(2.1)	→	$(2^{-2}, 1^0), (2^{-2}, 1^{-1}), (2^{-2}, 1^{-3})$
		$(2^{-4}, 1^0), (2^{-4}, 1^{-1}), (2^{-4}, 1^{-3})$
(2.2)	→	$(2^{-2}, 2^{-2}), (2^{-2}, 2^{-4})$
		$(2^{-4}, 2^{-2}), (2^{-4}, 2^{-4})$
(2.3)	→	$(2^{-2}, 3^{-5})$
		$(2^{-4}, 3^{-5})$
(3.1)	→	$(3^{-5}, 1^0), (3^{-5}, 1^{-1}), (3^{-5}, 1^{-3})$
(3.2)	→	$(3^{-5}, 2^{-2}), (3^{-5}, 2^{-4})$
(3.3)	→	$(3^{-5}, 3^{-5})$

Damit wird also jeder Peircezahl ein Feld von Relationalzahlen abgebildet

$F(R) \rightarrow P$ (vgl. Toth 2021).

Wie man aus der nachstehenden Tabelle ersieht, ist die konverse Abbildung der Relationalzahlen auf die Peircezahlen injektiv

(0, 0)	→	(1.1)	(-1, 0)	→	(1.1)
(0, -1)	→	(1.1)	(-1, -1)	→	(1.1)
(0, -2)	→	(1.2)	(-1, -2)	→	(1.2)

(0, -3)	→	(1.1)	(-1, -3)	→	(1.1)
(0, -4)	→	(1.2)	(-1, -4)	→	(1.2)
(0, -5)	→	(1.3)	(-1, -5)	→	(1.3)
(-2, 0)	→	(2.1)	(-3, 0)	→	(1.1)
(-2, -1)	→	(2.1)	(-3, -1)	→	(1.1)
(-2, -2)	→	(2.2)	(-3, -2)	→	(1.2)
(-2, -3)	→	(2.1)	(-3, -3)	→	(1.1)
(-2, -4)	→	(2.2)	(-3, -4)	→	(1.2)
(-2, -5)	→	(2.3)	(-3, -5)	→	(1.3)
(-4, 0)	→	(2.1)	(-5, 0)	→	(3.1)
(-4, -1)	→	(2.1)	(-5, -1)	→	(3.1)
(-4, -2)	→	(2.2)	(-5, -2)	→	(3.2)
(-4, -3)	→	(2.1)	(-5, -3)	→	(3.1)
(-4, -4)	→	(2.2)	(-5, -4)	→	(3.2)
(-4, -5)	→	(2.3)	(-5, -5)	→	(3.3)

Aus dieser Tabelle läßt sich nun eine 9×9 R-Matrix konstruieren, welche die von Bense (1975, S. 37) konstruierte 3×3 P-Matrix enthält:

0	3.1	⋕	2.1	1.1	2.1	1.1	1.1
-1	3.1	⋕	2.1	1.1	2.1	1.1	1.1
-2	3.2	⋕	2.2	1.2	2.2	1.2	1.2
-3	3.1	⋕	2.1	1.1	1.1	1.1	1.1
-4	3.2	⋕	2.2	1.2	2.2	1.2	1.2
	≠		≠	≠	≠	≠	≠
-5	3.3	⋕	2.3	1.3	2.3	1.3	1.3
	-5		-4	-3	-2	-1	0

Diese Matrix weist auf zwei Seiten einen Rand von verdoppelten Subzeichen auf, welcher der folgenden Subzeichen-Struktur der 3 × 3-Matrix korrespondiert

1.1 1.2 1.3

2.1

3.1,

also von Triade und Trichotomie der vollständigen M-Relation.

Dieser Rand bildet also den topologischen Rand des Kerns mit der Subzeichen-Struktur

2.2 2.3

3.2 3.3.

Dies ist insofern überraschend, als nach bisheriger Auffassung der drittheitliche Interpretantenbezug

1.3

3.1 3.2 3.3

den kontextuellen Rand des Kerns

1.1 1.2

2.1 2.2

bildet: „Erst die Kategorie des Interpretanten erlaubt es im semiotischen Schema, den Systembegriff einzuführen. Der Interpretant fundiert den Systembegriff, indem er den Objektbezug um die Dimension der Deutung erweitert, d.h. der Systembegriff ist die triadische Form der Thematisierung der objektiven Realität aus dem Zusammenhang ihrer Deutbarkeit durch den Interpretanten“ (Ditterich 1992, S. 31). „Die Bedeutung bleibt als Superposition der Bezeichnung an deren dyadische Struktur gebunden” (ibd., S. 37).

Literatur

Aczel, Peter, Non-Well-Founded Sets. Stanford, CA, 1988

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Bense, Max, Die Eigenrealität der Zeichen. Baden-Baden 1992

Ditterich, Joseph, Selbstreferentielle Modellierungen. Klagenfurt 1992

Kronthaler, Engelbert, Grundlegung einer Mathematik der Qualitäten. Frankfurt am Main 1986

Toth, Alfred, Semiotik als Theorie gradativer Relationalität. Tucson, AZ 2019 (= 2019a)

Toth, Alfred, Theorie der Relationalzahlen. Tucson, AZ 2019 (= 2019b)

Toth, Alfred, Relationale Zahlenfelder. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2021

31.1.2021